Шифр: А-28

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

по математике

2018/2019
Ленинградская область

Район Сосновоборский

Школа МБОУ „Лицей №8"

Класс 9Б

ФИО Стеблий Мария Александровна

А-28

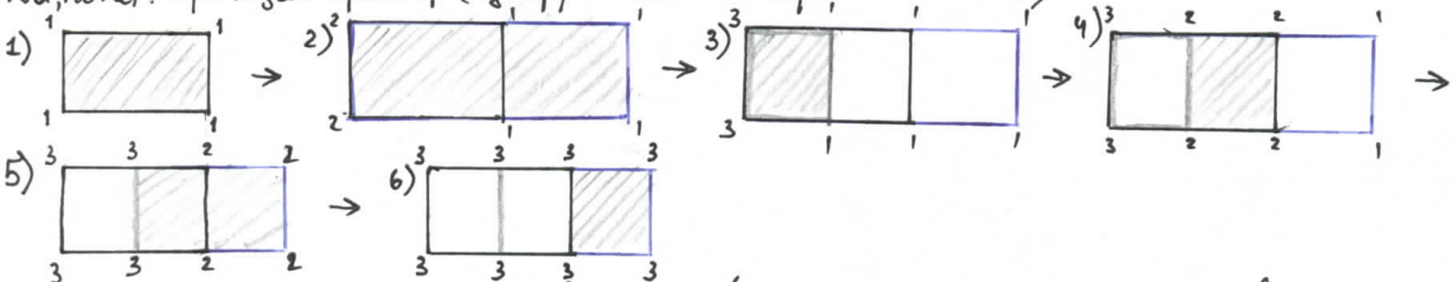
6	7	8	9	10	Σ
7	7	2	0	X	16

9.6.

Даны $a; a+1; a+2; a+3$, причем $a>100$ и a - натуральное.
Рассмотрим случай, когда $a \not\vdots 2$.
Тогда $a+(a+1)+(a+2)=3a+3=3(a+1)$ и т.к. $a \not\vdots 2$, то ~~a+1~~ $(a+1)\vdots 2$ и т.к. $a>100$ $a+1\neq 2$, т.е
$(a+1)$ составное и его можно представить в виде $2x$, где $\frac{a+1}{2}=x$. Тогда
$a+(a+1)+(a+2)=3\cdot 2\cdot x$, где $x\neq 1$, т.к $a+1>101$, т.е $a+1\neq 2$. ($(a+1)$ - четное, не простое число)
Рассмотрим случай, когда $a\vdots 2$.
Тогда $(a+1)+(a+2)+(a+3)=3a+6=3(a+2)$ и т.к $a\vdots 2$, то $(a+2)\vdots 2$ и т.к $a>100$, $(a+2)>102$, т.е
$a+2\neq 2$, т.е $(a+2)$ составное и его можно представить в виде $2y$, где $\frac{a+2}{2}=y$. Тогда
$(a+1)+(a+2)+(a+3)=3\cdot 2\cdot y$, где $y\neq 1$, т.к. $a+2>102$, т.е $a+2\neq 2$. ($(a+2)$ - четное, не простое число)
Т.к. $a+1>101$ и $a+2>102$, то x и y не будут равны 3 или 2, т.к.
$\frac{a+1}{2}>\frac{101}{2}$, т.е $x>50{,}5$ и $\frac{a+2}{2}>\frac{102}{2}$, т.е $y>51$, а $2<50{,}5$; $2<51$; $3<50{,}5$; $3<51$, т.е.
Из 4х последовательных ~~чисел~~ натуральных чисел, больших 100 мы сможем выбрать 3 числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, больших 1.

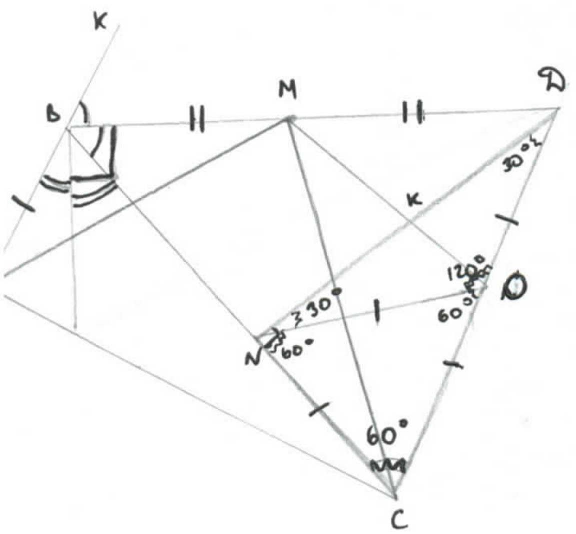
9.7.

Да, может. Приведем пример (цифры - кол-во вершин в точке)



Никакие 2 прямоугольника не совпадают (ни у каких 2х прямоугольников нет 4х общих вершин) и каждая вершина прямоугольника является вершиной ровно 3х прямоугольников.

9.8



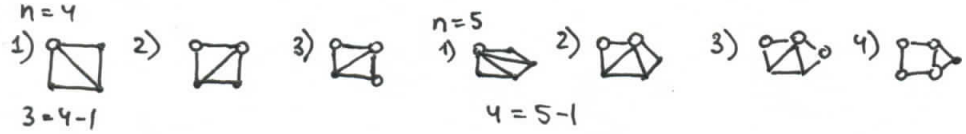
Дано: $\triangle ABC$; BD - биссектриса $\angle KBC$; $\angle BCD=60°$
$CD=2AB$; $BM=MD$.
Д-ть: $\triangle AMC$ - равноб.

Д-во:
1) Проведем $DN\perp BC$, NO - медиана $\triangle NDC$, т.е $NO=OD=OC=AB$, а т.к $\triangle NOC$ - равноб и $\angle NCO=60°$, то $NO=OD=OC=NC=AB$
2) $DN=CD\cdot\sin\angle NCD=2AB\cdot\sin 60°=2AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}AB$.
3) Проведем MO, это будет ср. линия для $\triangle BDC$, т.е $MO\parallel BC$, тогда $NK=KD$, т.к. $BM=MD$ и $MK\parallel BN$ ($K\in MO$) и $DO=OC$ и $KO\parallel NC$, т.е. KO - ср. линия для $\triangle DNC$, тогда $KO=\frac{1}{2}NC=\frac{1}{2}AB$; $NO=AB$, т.е. $NK^2=NO^2-KO^2=AB^2-\frac{1}{4}AB^2=\frac{3}{4}AB^2$, т.е. $DK=\sqrt{3}AB^2$.
(т.к. $KO\parallel NC$, а $DN\perp NC$, а $DN\cap MO=K$)

4.4.

Докажем, что кол-во хороших раскрасок в n-угольнике равно $n-1$.

База: $n=4$ … $n=5$



Переход: Пусть кол-во хороших раскрасок в k угольнике равно $k-1$. Докажем, что в $(k+1)$-угольнике их k.

Возьмем произвольный $(k+1)$-угольник и откинем 1 вершину, тогда мы получаем k-угольник с $(k-1)$ хорошей раскраской

Рассмотрим 1ую раскраску, где всего 1 белая вершина, если вершину, которую мы откинули ~~черная, то у нас уже есть 1 раскраска~~. закрасить черным, то мы получим хорошую раскраску для $(k+1)$угольника, если закрасить откинутую вершину белым, то в $(k+1)$-угольнике будет 2 белые вершины и мы просто отбросим черную вершину, у нас получается хорошая раскраска для k-угольника и одна черная вершина, тем самым мы получим хорошую раскраску для $(k+1)$-угольника, и так далее. Таким образом мы получим $(k-1)$ хорошую раскраску, но у $(k+1)$-угольника есть ещё одна раскраска, где k белых вершин и 1 черная. Следовательно для $(k+1)$-угольника всего k раскрасок. чтд.

Значит кол-во хороших раскрасок в n угольнике равно $n-1$. чтд.

Отв: $(n-1)$

А-28

1	2	3	4	5	Σ
7	7	X	7	0	21

9.1.

Пусть $f(x)=x^2+b_1x+c_1$ и $g(x)=x^2+b_2x+c_2$. Нам дано, что

$\begin{cases} f(1)=g(2) \\ g(1)=f(2) \end{cases}$, тогда $\begin{cases} 1+b_1+c_1=4+2b_2+c_2 \\ 1+b_2+c_2=4+2b_1+c_1 \end{cases}$ $\begin{cases} 1+b_1+c_1=4+2b_2+c_2 \\ 4+2b_1+c_1=1+b_2+c_2 \end{cases}$

вычтем из 1ого выражения 2ое и получим

$-3-b_1=3+b_2$, тогда $-b_1-b_2=6$, нам также дано, что каждый из данных приведенных квадратных трехчлена имеет по 2 корня, тогда по теореме Виета

$\begin{cases} x_1+x_2=-b_1 \\ x_3+x_4=-b_2 \end{cases}$, где x_1 и x_2 корни $f(x)=0$ и x_3 и x_4 корни $g(x)=0$, тогда

$x_1+x_2+x_3+x_4=-b_1-b_2=6$, как уже ранее доказано, т.е $x_1+x_2+x_3+x_4=6$

Ответ: 6.

9.2

Докажем методом от противного, что все рыцарями точно быть не могут. Предположим, что это всё-таки так, тогда из 1ых высказываний нам известно, что все загаданные числа больше 1, но если мы перейдем ко к следующим высказываниям мы замечаем, что кто-то говорит, что его число <1, но это противоречит ~~условию~~ предположению, что все рыцари, т.к. по 1ым высказываниям мы заметили, что числа >1, аналогично скажем и про человека, который сказал, что его число <2, это также противоречит ~~условию~~ предположению, что все рыцари, т.к. все задумали целые числа, а на промежутке $(1;2)$ таковых нет.

Тем самым мы доказали, что ~~у нас~~ в данной ситуации как минимум 2 лжеца, значит максимальное кол-во рыцарей может быть равно 8.

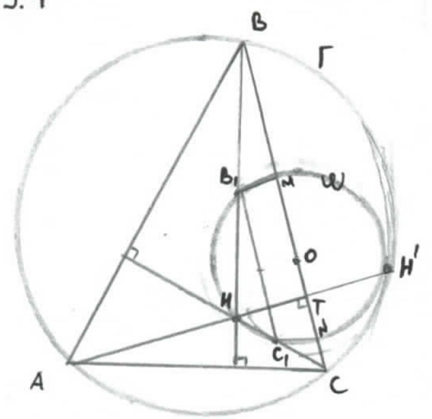
Приведём пример (Л - лжецы; Р - рыцари; ниже - промежутки, которые они указали)

1лжец	2лжец	1р	2р	3р	4р	5р	6р	7р	8р
Л	Л	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р
>10	>9	>8	>7	>6	>5	>4	>3	>2	>1
<1	<2	<10	<9	<8	<7	<6	<5	<4	<3

(лжецы загадали любое число из промежутков (1;10) - 1ый и (2;9) - 2ой, а рыцари 1ый - 9; 2ой - 8; 3ий 7; 4ый - 6; 5ый - 5; 6ой - 4; 7ой - 3; 8ой - 2)

Отв: 8.

9.4

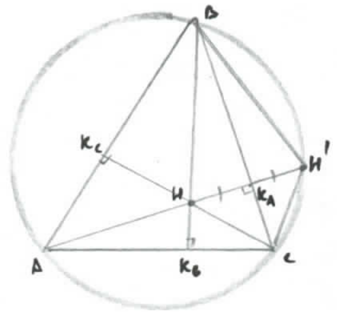


Дано: $\triangle ABC$ - остроугольный; H-ортоцентр; $B_1 \in BH$; $C_1 \in CH$; $B_1C_1 \parallel BC$
O-центр ω; $O \in BC$

Д-ть: окр. Г касается окр. ω

Д-во:

1) Найдем на окр. Г точку H', это точка, симметричная точке H относительно BC, отрезок HH' будет делиться BC на 2 равных отрезка по свойству ортоцентра.; B_1MNC_1-равнобедренная трапеция.



1) отразим относительно BC H и получим H'; $BH = BH'$, $CH = CH'$ BC-общ, т.е. $\triangle HBC = \triangle BH'C$, т.е $\angle BHC = \angle BH'C$.

2) $\triangle BK_cC$ и $\triangle BK_BC$ - прямоуг., т.е. $\angle HBC = 90 - \angle C$ $\angle HCB = 90 - \angle B$, т.е. $\angle BHC = 180 - (90 - \angle C) - (90 - \angle B) = \angle B + \angle C = 180 - \angle A$, значит $\angle BH'C = 180 - \angle A$, т.е. H' лежит на окр, опис $\triangle ABC$, т.е. $HK_A = H'K_A$ и H' лежит на окр, опис. $\triangle ABC$.

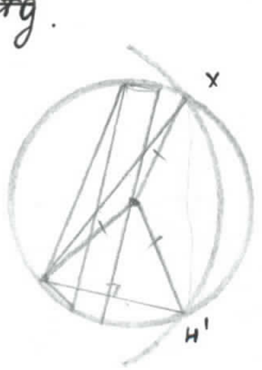
2) Тогда рассмотрим $\triangle HOH'$, в нем $OC \perp HH'$ и BC делит HH' на 2 равных отрезка HT и $H'T$, т.е. $\triangle HOH'$-равнобедренный, т.к OC является и высотой и медианой, тогда $OH = OH'$, а т.к OH-радиус окр. ω, то H' принадлежит окр ω, т.к ~~равна~~ OH' равен её радиусу. Следовательно окр. ω и окр. Г пересекаются как минимум в 1 точке.

3) Пусть существует вторая точка пересечения этих окружностей - X, тогда

~~$OH = OX$ и BC делит HX на 2 равных отрезка, тогда $BC \perp HX$, но из точки H мы можем провести лишь один $\perp$-р к прямой BC, т.е. X совпадает с H', следовательно окр ω и окр Г пересекаются в одной точке, т.е касаются.~~

чтд.

$OH = OX$ и BC делит HX на 2 равных отрезка, т.к для того чтобы X лежала на окр Г нужно, чтобы она была симметрична H относительно BC, т.е. $BC \perp HX$ (т.к. $\triangle OHX$-равноб и BC-медиана), но тогда X совпадает с H', т.е. окружности ω и Г касаются в точке H'.

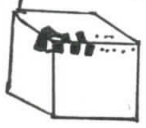


А-20.

9.5.

Одну грань можно закрасить в шахматном порядке, тогда будет выполняться условие, а также у нас будет максимальное кол-во закрашенных клеток. кол-во строк и столбцов четно, т.е в шахматном порядке мы можем закрасить 4 грани (переднюю, заднюю; верхнюю; нижнюю). $4 \cdot \frac{1000}{2} \times 1000 = 2000.000$ клеток

Рассмотрим 2 боковые стороны. Раскрасить аналогично другим сторонам боковые мы не можем.

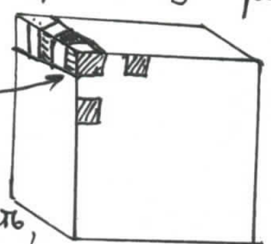


У куба 8 углов, в каждом из которых может стоять лишь 1 клетка. (+8 клеток)
Далее рассмотрим его грани, но уже без этих углов. „Развернем" их и получим 12 прямоугольников 2×998, для максимального кол-ва раскрасим их в шахматном порядке ($+ 998 \times 12$ клеток)
Без рассмотрения остались 6 квадратов 998×998. У них четное кол-во строк и столбцов, т.е при раскраске их в шахматном порядке мы получим $\frac{998}{2} \cdot 998$ закрашенных клеток в каждом ($+ \frac{998^2}{2} \cdot 6 = 998^2 \cdot 3$ клеток)

$$8 + 998 \times 12 + 998^2 \times 3 = 8 + 998 \times 3 (4 + 998) = 2999.996 \text{ клеток}$$

~~Отв: 2999996~~

~~Аналогичн~~ Этот ответ можно получить иначе. Мы раскрашиваем весь куб в шахматном порядке и получаем $\frac{1000^2}{2} \cdot 6 = 3 \cdot 1000^2$ клеток и ~~по~~ убираем 4 клетки, т.к. у 4х вершин ~~встретится~~ найдутся 2 клетки с общей стороной, т.е ответ $3 \cdot 1000^2 - 4$.
По такому принципу строится пример.



та клетка, которую нужно убрать, их будет ровно 4 при верно построенном примере.

Отв: $3 \cdot 1000^2 - 4$